离散有限型投资决策模型的扩展与完善

陈　静，丁岳维（教授）

【摘要】在离散和有限的基础上，对投资决策模型进行扩展与完善，使离散变为连续、有限变为无限，并利用MATLAB软件对其函数图像进行分析。通过分析函数图像，在可行域内寻找投资决策模型的最佳决策时机，并利用二分法原理改变其主要影响变量的大小，进一步分析净现值与时间的函数关系的变化情况，可得出理想的函数关系曲线并寻找可行域内的最佳投资时机。

【关键词】投资决策；净现值；投资时机；最优解

【中图分类号】F202　　【文献标识码】A　　【文章编号】1004-0994（2017）14-0056-5

一、投资决策问题的提出

1. 原决策问题的提出。荆新、王化成等的《财务管理学（第七版）》第8章例8-6假定：随着时间的推移，经济林的数目将更加茂密，单位面积的经济价值会逐年提高。根据预测，单位面积的销售收入将逐年增加，采伐成本也会逐年增加，在假定条件下研究两个时机的林木采伐决策问题。

原例题：林木可供采伐4年，初始成本为100万元，直线法折旧年限为4年，无净残值，营运资本垫支20万元，采伐结束后收回。计划每年采伐200亩林木，首年每亩销售收入为1万元，每亩林木的付现成本为0.35万元，每年每亩林木的销售收入提高20%，采伐成本增加10%，得到三年后采伐的结论。这一案例虽简单，却给出一类确定最佳投资时机的决策问题，教材从两个时机中选优是值得商榷的。笔者认为最优解应在区间内或从多个时机中选取。

对林木采伐或同类问题，可考虑树木的成熟期，在预测条件下，在林木销售收入、采伐付现成本以一定百分比变化的基础上，可以建立净现值关于时间的函数关系模型，研究净现值是如何随着时间的变化而变化的，即从动态效率原则出发，推算出林木采伐的最优时机，以保证从中获得最大净收益。

2. 新决策问题的提出。目前，投资决策的前沿理论为实物期权理论，国内仅有少量关于林业采伐投资决策的相关文献资料。杨屹等（2004）提出了不完全信息下实物期权定价方法的未来研究领域和技术路线。他们介绍的林业采伐决策理论基于收益最大化考虑，采用收益净现值法，该方法下的林业采伐决策理论的核心是林业价值评估。张兰花等（2010）从林农采伐成本的角度，基于限额采伐管理分析了林业采伐决策的影响。姜昕、王秀娟（2013）在Tietenberg（2003）和Randall（1987）的模型设计的基础上，将单期最优采伐决策模型扩展到无限期，并考虑了木材价格上涨、环境效益和代际公平等影响因素，建立起一个动态效率原则下的最优采伐决策模型。

基于前述例题中的模型设计，本文首先将原例题中的有限期最优采伐时机决策模型扩展到无限期，并将最优采伐时机决策所在的年份进一步扩展到某一具体时间，建立起一个有效的采伐时机决策模型；然后以此模型论证不同情况下的最优林木采伐时机，以实现净现值（NPV）的最大化。

二、最佳投资决策模型的构建

新建投资决策模型以林木可采伐时间的区间为其可行域，且时间为可行域上的任一时点，以保证新建投资决策模型的无限性和连续性，便于在可行域内求得最大净现值所对应的时间点。

（一）投资决策模型对时机的假设

1. 模型所用变量与符号的定义。模型中：t表示采伐时间，以年为单位；k_0表示折现率；k_1表示销售收入的年增长率；k_2表示付现成本的年增长率；NPV表示净现值，是时间t的函数；NCF_t表示现金净流量；CI表示现金流入量；CO表示现金流出量；C_0表示初始成本。

2. 假设因素的扩展。

(1)时间的连续性。在前面所述例题中，只考虑了现在和三年后两个时点的情况，实际上林业公司也可以在两时点间的某一时点采伐，可能会出现在该区间某一时点采伐、净现值更大的情况。因而，要将采伐时间由间断的两个点扩展到一个区间，保证时间的连续性，以便在该区间内找到最佳投资时机。

(2)有限决策变无限。只考虑现在和三年后两种情况具有一定的局限性，而林业公司在林木的可采伐时间区间内均可进行林木的采伐，因此要找到最佳采伐时机，就需要考虑林木的整个可采伐时间区间，在该区间内的任一点都可能会是最佳采伐时机。所以，要在可采伐时间区间内建立投资决策模型。

(二)新投资决策模型的建立

本文的目标函数是：

$$\text{MaxNPV}=\sum\frac{\text{NCF}_t}{(1+k_0)^t}-C_0=\sum\frac{\text{CI}-\text{CO}}{(1+k_0)^t}-C_0$$

在k_0、k_1、k_2均未知且不考虑其他条件的情况下，第t年初采伐的营业现金流量如表1所示，第t年初采伐的现金流量如表2所示。

表 1　　第t年初采伐的营业现金流量

项目	第t年	第t+1年	第t+2年	第t+3年
销售收入	$200\times(1+k_1)^{t-1}$	$200\times(1+k_1)^{t}$	$200\times(1+k_1)^{t+1}$	$200\times(1+k_1)^{t+2}$
付现成本	$70\times(1+k_2)^{t-1}$	$70\times(1+k_2)^{t}$	$70\times(1+k_2)^{t+1}$	$70\times(1+k_2)^{t+2}$
折旧	25	25	25	25
税前利润	$200\times(1+k_1)^{t-1}-70\times(1+k_2)^{t-1}-25$	$200\times(1+k_1)^{t}-70\times(1+k_2)^{t}-25$	$200\times(1+k_1)^{t+1}-70\times(1+k_2)^{t+1}-25$	$200\times(1+k_1)^{t+2}-70\times(1+k_2)^{t+2}-25$
所得税	$25\%\times[200\times(1+k_1)^{t-1}-70\times(1+k_2)^{t-1}-25]$	$25\%\times[200\times(1+k_1)^{t}-70\times(1+k_2)^{t}-25]$	$25\%\times[200\times(1+k_1)^{t+1}-70\times(1+k_2)^{t+1}-25]$	$25\%\times[200\times(1+k_1)^{t+2}-70\times(1+k_2)^{t+2}-25]$
税后利润	$75\%\times[200\times(1+k_1)^{t-1}-70\times(1+k_2)^{t-1}-25]$	$75\%\times[200\times(1+k_1)^{t}-70\times(1+k_2)^{t}-25]$	$75\%\times[200\times(1+k_1)^{t+1}-70\times(1+k_2)^{t+1}-25]$	$75\%\times[200\times(1+k_1)^{t+2}-70\times(1+k_2)^{t+2}-25]$
营业现金流量	$75\%\times[200\times(1+k_1)^{t-1}-70\times(1+k_2)^{t-1}]+6.25$	$75\%\times[200\times(1+k_1)^{t}-70\times(1+k_2)^{t}]+6.25$	$75\%\times[200\times(1+k_1)^{t+1}-70\times(1+k_2)^{t+1}]+6.25$	$75\%\times[200\times(1+k_1)^{t+2}-70\times(1+k_2)^{t+2}]+6.25$

表 2　　第t年初采伐的现金流量

项目	第t−1年	第t年	第t+1年	第t+2年	第t+3年
固定资本投资	−100				
营运资本垫支	−20				
营业现金流量		$75\%\times[200\times(1+k_1)^{t-1}-70\times(1+k_2)^{t-1}]+6.25$	$75\%\times[200\times(1+k_1)^{t}-70\times(1+k_2)^{t}]+6.25$	$75\%\times[200\times(1+k_1)^{t+1}-70\times(1+k_2)^{t+1}]+6.25$	$75\%\times[200\times(1+k_1)^{t+2}-70\times(1+k_2)^{t+2}]+6.25$
营运资本回收					
现金流量	−120	$75\%\times[200\times(1+k_1)^{t-1}-70\times(1+k_2)^{t-1}]+6.25$	$75\%\times[200\times(1+k_1)^{t}-70\times(1+k_2)^{t}]+6.25$	$75\%\times[200\times(1+k_1)^{t+1}-70\times(1+k_2)^{t+1}]+6.25$	$75\%\times[200\times(1+k_1)^{t+2}-70\times(1+k_2)^{t+2}]+6.25$

此时，净现值NPV与时间t的函数关系为：

$$\text{NPV}(t)=\sum_{n=t-1}^{t+2}[150\times(1+k_1)^n-52.5\times(1+k_2)^n+6.25]/(1+k_0)^{n+1}-120$$

(三)扩展投资决策模型简评

1. 新建投资决策模型的优点。与原有的投资决策模型相比，新建投资决策模型不仅可以将两个时点的净现值单独对比，从有限点中得到最优值，还可获得可行域，即可采伐时间段中能够使用的函数值，也就是净现值达到最大值的点，实现了投资决策中时间的连续性和无限性，使投资决策更简洁直观。

2. 新建投资决策模型的开拓点。新建投资决策模型的开拓点为函数图像的增减变化趋势。利用函数图像可直观反映出可行域中函数的最大值点。

3. 相关参数的界定。在新建投资决策模型中，将折现率k_0、付现成本的年增长率k_2作为确定的参数，销售收入的年增长率k_1作为不确定的参数，以便分析k_1变化时该模型的整体变化趋势。

三、案例分析及启示

（一）原投资决策模型的结果及分析

在前述条件下，可以计算出当前采伐的净现值以及三年后采伐的净现值，并加以比较。

当前采伐的净现值为：

$$NPV(1)=\sum_{t=0}^{3}\{200\times(1+20\%)^t-70\times(1+10\%)^t-25\%\times[200\times(1+20\%)^t-70\times(1+10\%)^t-25]\}/(1+10\%)^{t+1}-120$$

$$=\frac{9761085}{29282}\approx 333.347619$$

三年后采伐的净现值为：

$$NPV(2)=\sum_{t=3}^{6}\{200\times(1+20\%)^t-70\times(1+10\%)^t-25\%\times[200\times(1+20\%)^t-70\times(1+10\%)^t-25]\}/(1+10\%)^{t+1}-120$$

$$=\frac{10029563880}{19487171}\approx 514.675212$$

可见，三年后采伐的净现值更大，采伐更为合理。但因只有两组数据，数据过于单一，并不能很好地得出三年后是最佳投资时机的结论。因此需对数据进行扩展，使其变为无限、连续的，再对新建模型进行计算分析。

（二）新建投资决策模型的结果及分析

1. 情形一。如果 $k_0=k_2=10\%$，$k_1=20\%$，则：

$$NPV_1(t)=\frac{761875}{1331}\cdot\left(\frac{12}{11}\right)^t+\frac{116025}{5324}\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^t-\frac{3420}{11}$$

其导函数为：

$$NPV_1'(t)=\frac{761875}{1331}\cdot\ln\frac{12}{11}\cdot\left(\frac{12}{11}\right)^t+\frac{116025}{5324}\cdot\ln\frac{10}{11}\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^t$$

令 $NPV_1'(t_0)=0$，得 $t_0\approx-5.1075$，而 t 的取值为非负，即 $NPV_1'(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上都大于零，$NPV_1(t)$ 单调递增，因而，净现值 NPV_1 在可能的时间范围内呈现递增趋势，且增长率逐渐增大。利用 MATLAB 软件画出该函数的图像，反映出净现值 NPV_1 随时间 t 变化的趋势，时间 t 为相应横坐标，净现值 NPV_1 为相应纵坐标，如图 1 所示。

图 1 表明，该函数在 t=0 处的取值在（280，290）内，并且在无限期内可以达到无限大。在实际的林木采伐时机决策中，鉴于林木采伐年龄是有一定期限的，因而在林木可采伐的年龄期的最后一年年末采伐，所获得的净现值大于其他任何年份，即净现值 NPV 在最后一年年末可达到最大值，因而该时间点就是林木最佳采伐时机。

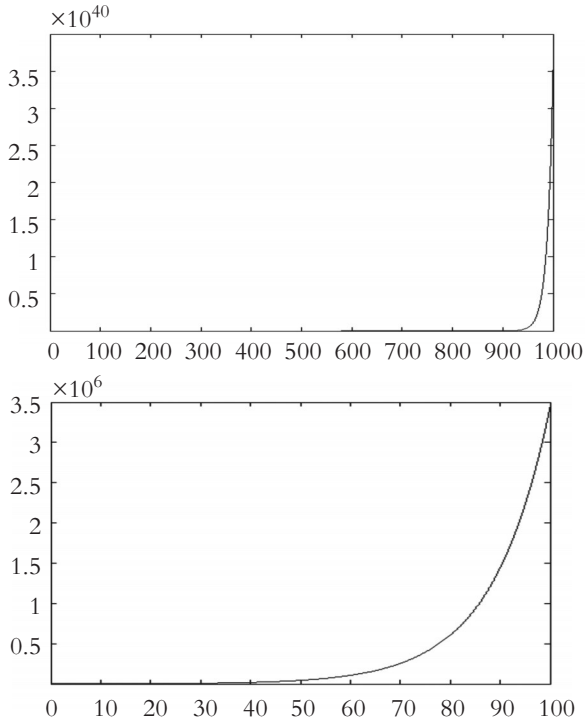

图 1 净现值 NPV_1 随时间 t 变化的趋势

根据净现值 NPV_1 与时间 t 的函数关系式可以看出，净现值的升降趋势是由 $1+k_1$ 与 $1+k_0$ 的比值以及 $1+k_2$ 与 $1+k_0$ 的比值决定的，也就是由 k_1 与 k_0 的比值以及 k_2 与 k_0 的比值决定的。在上述过程中，$k_0=k_2=10\%$，$k_1=20\%$ 时，函数是单调递增的。

假设 $k_0=k_2=10\%$，k_1 未知，净现值 NPV 与时间 t 的函数关系式可以表达为：

$$NPV_1(t)=\frac{1-\left(\frac{1+k_1}{11/10}\right)^4}{1-\frac{1+k_1}{11/10}}\cdot\frac{150}{1+k_1}\cdot\left(\frac{1+k_1}{11/10}\right)^t+\frac{116025}{5324}\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^t-\frac{3420}{11}$$

2. 情形二。现令 $k_1=10\%$，将 k_1 的值代入上述函数关系式中，整理可得到：

$$NPV_2(t)=\frac{116025}{5324}\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^t-\frac{2580}{11}$$

显然，由于 $\left(\frac{10}{11}\right)^t$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，该函数也是单调递减的。净现值 NPV_2 在可能的时间范围内呈现递减趋势，且递减率逐渐增加。利用

MATLAB软件画出该函数的图像，反映出净现值NPV_2随时间t变化的趋势，时间t为相应横坐标，净现值NPV_2为相应纵坐标，如图2所示。

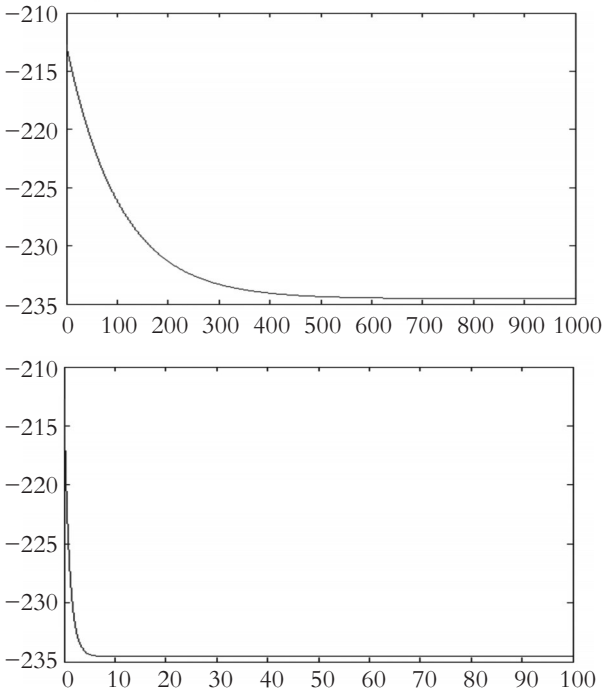

图 2 净现值NPV_2随时间t变化的趋势

图2表明，该函数在t=0处的值最大，如果$NPV_2(0)>0$，那么在林木采伐时机决策中，管理者应选择在林木可采伐的年龄期的期初就采伐林木，此时所获得的净现值为最大值，所以林木可采伐的年龄期的期初即为林木最佳采伐时机。然而根据图2所示的函数图像，可以得到$NPV_2(0)<0$，也就是说无论t取何值，净现值NPV_2都小于0。究其原因，相对于付现成本的年增长率而言，销售收入的年增长率过小，无论在哪个时间采伐，其净现值都小于零，因此这种情况下并不适宜采伐林木。

通过以上两种不同情况下对净现值NPV与时间t的函数关系曲线变化趋势的讨论，可看出当k_0、k_2不变，k_1由20%减小到10%时，函数关系变化趋势由单调递增变为单调递减。指数函数的图像是随着底数的连续变化而逐渐改变的，净现值NPV与时间t的函数关系曲线与之相似，由此可以推断随着k_1的连续变化，净现值NPV与时间t的函数曲线变化趋势也是连续的。此外，底数不同的指数函数其图像也是不同的，因此t取任意值时，净现值NPV与时间t的函数曲线都不会与x轴平行。综上所述，k_1在区间(10%，20%)内进行取值时，会出现净现值NPV与时间t的函数曲线为U型的情况。因此，本文将运用二分法进行以下情况的讨论和分析。

3. 情形三。k_1取(10%+20%)/2，即取15%时，净现值NPV_3与时间t的函数关系为：

$$NPV_3(t)=\frac{17094375}{30613}\cdot\left(\frac{23}{22}\right)^t+\frac{116025}{5324}\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^t-\frac{3420}{11}$$

其导函数为：

$$NPV_3'(t)=\frac{17094375}{30613}\cdot\ln\frac{23}{22}\cdot\left(\frac{23}{22}\right)^t+\frac{116025}{5324}\cdot\ln\frac{10}{11}\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^t$$

令$NPV_3'(t_0)=0$，得到$t_0\approx-17.7499$，而t的取值为非负，即$NPV_3'(t)$在$(0,+\infty)$上都大于零，$NPV_3(t)$单调递增，净现值NPV_3在可能的时间范围内呈现递增趋势，且增长率逐渐增大。利用MATLAB软件画出该函数的图像，反映出净现值NPV_3随时间t变化的趋势，时间t为相应横坐标，净现值NPV_3为相应纵坐标，如图3所示。

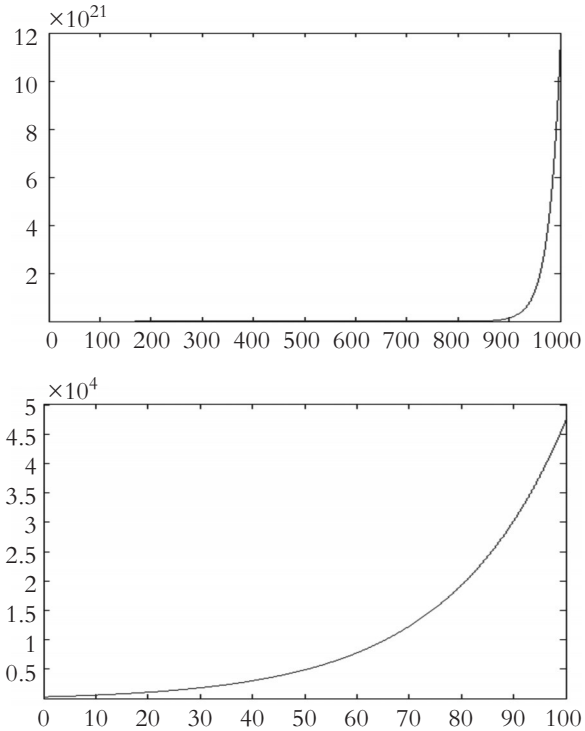

图 3 净现值NPV_3随时间t变化的趋势

由图3可以看出，净现值NPV_3随时间t的增加呈上升趋势，但与净现值NPV_1与时间t的函数图像变化趋势相比较为平缓。因此，再以15%作为取值区间的右端点，令k_1取(10%，15%)的中间值，得到净现值NPV_4与时间t的函数关系。经检验，所得函数图

像依然呈上升趋势，但更为平缓。再令k_1取值依此继续下去，得到递增函数$NPV_5(t)$、$NPV_6(t)$……

4. 情形四。当k_1取10.078125%时，所得函数关系式为：

$$NPV_9(t)=\frac{4191426624375}{7681552384}\cdot\left(\frac{1409}{1408}\right)_t+\frac{116025}{5324}\cdot\left(\frac{10}{11}\right)_t-\frac{3420}{11}$$

其导函数为：

$$NPV_9(t)=\frac{4191426624375}{7681552384}\cdot\ln\frac{1409}{1408}\cdot\left(\frac{1409}{1408}\right)^t+\frac{116025}{5324}\cdot\ln\frac{10}{11}\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^t$$

令$NPV_9'(t_0)=0$，得到$t_0\approx17.4887$，发现$NPV_9(t)$在$(0,t_0)$上单调递减，在$(t_0,+\infty)$上单调递增，即$NPV_9(t)$在t_0处取得最小值。利用MATLAB软件画出该函数的图像，反映出净现值NPV_9随时间t变化的趋势，时间t为相应横坐标，净现值NPV_9为相应纵坐标，如图4所示。

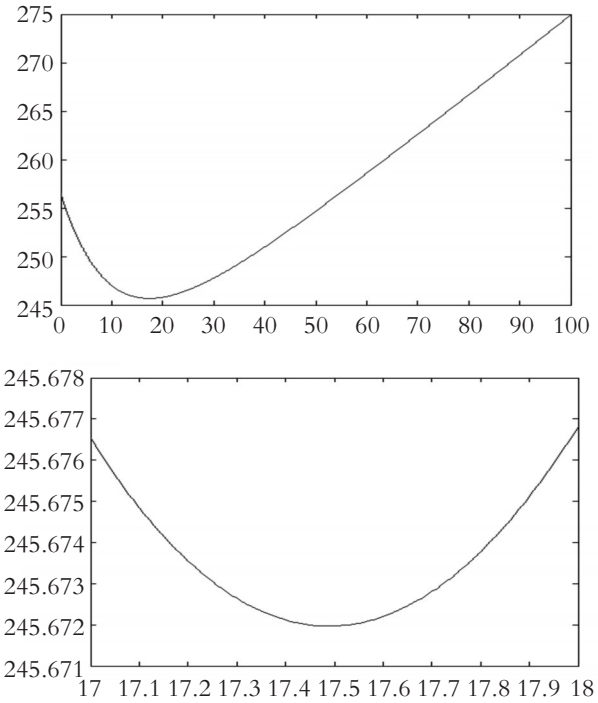

图 4 净现值NPV_9随时间t变化的趋势

由图4可以看到，$NPV_9(t)$的函数图像呈U型，即先减后增。$NPV_9(t)$在区间(17.4，17.6)内取得最小值，且最小值为正数，也就是任意$NPV_9(t)$的值均为正。而且在区间(17.9，18)内存在某一点t_1，使得$NPV_9(t_1)$的值与$NPV_9(0)$的值相等。于是，林木可采伐的年龄期仅包括t_1左边的点(包括t_1点)时，在该区间内函数的最大值为t=0处的值，也就是说，林木可采伐的年龄期的期初即为林木最佳采伐时机。林木可采伐的年龄期也包括t_1右边的点时，林木最佳采伐时机则为林木可采伐的年龄期的期末。

(三)启示

该投资决策模型充分考虑了林木采伐的整个时间区间，对原有投资决策模型的选择时机进行扩展，突破了非此即彼的局限，更加贴近于实际。在林业资源管理中，采伐决策的时机选择往往受林木生长情况、市场环境、国家财经政策等多种因素的影响，其中较为直接的因素是采伐付现成本与采伐量。本文新建了林业采伐的投资决策模型，探讨第t年的净现值与时间的关系，研究各参数对净现值的影响，从而得出了最优的林木采伐时机。

在整个林木的可采伐期内进行最优的投资决策时机选择，同样可适用于其他的投资决策案例中，建立相关参数的投资决策模型，从而得出最优解，对投资决策者而言更加贴近于实际，也更加有利。

四、结论

本文讨论了在不同销售收入增长率下净现值的结果并进行了对比，选取了林木采伐的最佳时机。但所采用的NPV方法还是有缺陷的，主要表现为：项目投资期内各年所产生的净现金流量是估算出的，不能保证其精确度；假设整个项目投资期内不出现预期之外的大的环境变化；实际投资活动的不可逆性与NPV方法假设的投资活动可逆性的冲突。然而现实的投资环境千变万化，存在大量的不确定因素，不可能准确确定各种数据的值。种种缺陷限制了NPV方法的准确性，所以根据NPV方法得出的结果仅可为投资者进行投资活动提供参考。

主要参考文献：

荆新，王化成，刘俊彦. 财务管理学(第七版)[M]. 北京：中国人民大学出版社，2015.

范龙振，唐国兴. 投资机会的价值与投资决策——几何布朗运动模型[J]. 系统工程，1998(8).

杨屹，扈文秀，杨乃定. 实物期权定价理论综述及未来研究领域展望[J]. 数量经济技术经济研究，2004(12).

张兰花等. 限额采伐管理制度对林农采伐决策影响分析[J]. 林业经济问题，2010(6).

姜昕，王秀娟. 森林的最优采伐决策模型[J]. 林业科学，2013(9).

作者单位：长安大学经济与管理学院，西安710064