

运用 Pair-copula 贝叶斯网络模型 分析多资产投资组合风险

杜子平(博士生导师), 李丽娜

(天津科技大学经济与管理学院, 天津 300222)

【摘要】 目前,高维情况下的多资产投资组合的风险管理中常用 Vine Copula 来拟合资产收益率的联合分布,但 Vine 结构的构建随着资产个数增加是非常复杂的,并且由于其网络结构没有考虑到变量间的实际依赖关系,导致无现实解释意义。基于此,本文结合 PC 算法和爬山算法构建了多个资产间的 Pair-copula 贝叶斯网络模型来刻画资产间的相依结构,结合蒙特卡罗模拟法计算投资组合风险价值(VaR),并通过 Kupiec 检验法验证了计算的可靠性。

【关键词】 Pair-copula 贝叶斯网络; 多资产投资组合; VaR; 风险传递路径; 蒙特卡罗模拟

一、引言

多样化投资作为风险规避的主要途径一直备受广大投资者和金融机构的重视,实际生活中的投资组合往往由多个资产构成,具有较高的维数,藤结构作为高维 Copula 建模的主要技术由杜子平、闫鹏等(2009)引入国内,现已成为多资产投资组合风险分析的热点研究理论。黄恩喜、程希俊(2010)基于 C 藤、D 藤结构构建 Pair-copula GARCH 模型,进行投资组合 VaR 值预测。高江(2011)使用藤 Copula 方法计算多资产投资组合的 VaR 并进行预测效果检验,证明藤 Copula 模型在多资产投资组合 VaR 预测中的有效性。杜子平、汪寅生等(2012)考虑资产间局部相关结构的差异,采用混合 C 藤 Copula 模型进行了外汇资产组合的 VaR 研究。

藤结构为高维 Copula 提供了可行、有效的建模方式,但在实际应用中随着变量数量的增加,基于藤结构分解的 Pair-copula 的数量将呈二次平方函数增长,高维下的参数估计也相当复杂,并且藤结构只是给出联合概率密度函数的一种分解形式,无法解释变量间连接关系的实际意义。

贝叶斯网络是联合分布分解的另一种表达方式, Kurowicka 和 Cooke(2005)将 Pair-Copula 的概念应用到贝叶斯网络当中,由有向无环图(DAG)指出变量间的马尔科夫结构,得到了一种新型的 Pair-copula 构建方式,该模型被定义为 Pair-copula 贝叶斯网络(PCBN)。Hanea(2006)、Hanea 和 Kurowicka(2008)重点研究基于 Copula 函数的连续型贝叶斯网络非参数统计推导过程。Alexander Bauer(2011)指出基于 DAG 的 Pair copula 构建方式比藤 Copula 的构建方式需要更少的参数。Alexander Bauer 和 Claudia Czado(2012)重点研究 PCBN 模型参数似然推

倒过程和数据驱动下的结构学习方法。

本文基于以上研究理论,采用 PCBN 模型构造多个资产的高维 Copula 模型及其联合分布函数,捕捉资产间的非线性相依结构并获得风险传递网络,根据变量间的连接关系及相依程度为投资组合管理提供参考,并结合蒙特卡罗模拟方法计算投资组合 VaR 值,说明 PCBN 模型在多资产投资组合风险管理领域中的应用优势。

二、模型与研究方法

1. Pair-copula 贝叶斯网络模型(PCBN)。 Pair-copula 贝叶斯网络依赖一个 DAG 编码变量间的条件独立性,并针对连续型数据使用 Copula 函数参数化的条件概率密度连接网络中的节点,从而精确控制单变量边际分布的形式,刻画节点相依程度大小。

令 $D=(V, E)$ 表示一个 PCBN 的 DAG, V 为顶点集, E 为边集,用 D^m 表示 D 的道德图。对于变量 $i \in V$, i 的母节点集: $pa(i) := \{j \in V \mid (j, i) \in E\}$, 祖先节点集: $an(i) := \{j \in V \mid \exists \text{路径 } j \text{ 到 } i\}$; 子节点集: $de(i) := \{j \in V \mid \exists \text{路径 } i \text{ 到 } j\}$, 非子节点集: $nd(i) := V \setminus (\{i\} \cup de(i))$ 。

令 P 表示 R^d 上绝对连续的概率测度,其中 $d := |V|$, 令 X 为一概率分布为 P 的随机变量。对于 $i \in V$ 假如 P 满足下式,则称 P 具有局域 D -马尔科夫属性。

$$X_i \perp X_{nd(i) \setminus pa(i)} \mid X_{pa(i)} \quad (1)$$

对于 $I, J, K \subseteq V$, 且 I, J, K 两两不相交,若满足下式,则称 P 具有全局 D -马尔科夫属性。

$$X_I \perp X_J \mid X_K \quad (2)$$

式(1)和式(2)将 P 边际分布的(条件)独立性与有向无环图 D 的图分离属性相连接, Lauritzen(1996)证明当且仅当 P 满足全局 D -马尔科夫属性时 P 才满足局域 D -马尔科夫属性。因此,当概率测度 P 满足式(1)、式(2)时,就

称 \mathbf{P} 具有 \mathbf{D} —马尔科夫属性。假设 \mathbf{P} 的概率密度函数为 \mathbf{f} , 若 \mathbf{P} 满足 \mathbf{D} —马尔科夫属性, 则通过 \mathbf{D} —递归分解可以得到式 (3):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \prod_i \mathbf{f}_{i|\mathbf{pa}(i)}(\mathbf{x}_i | \mathbf{x}_{\mathbf{pa}(i)}) \quad (3)$$

其中: $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d) \in \mathbf{R}^d$, $\mathbf{f}_{i|\mathbf{pa}(i)}(\cdot | \mathbf{x}_{\mathbf{pa}(i)})$ 表示在给定 $\mathbf{X}_{\mathbf{pa}(i)} = \mathbf{x}_{\mathbf{pa}(i)}$ 时, \mathbf{X}_i 的条件概率密度函数(pdf)。在语义上, 贝叶斯网络是联合概率分布的分解的一种表示, 其剔除变量间的条件独立关系, 有效地降低了模型估计的复杂程度。

PCBN 由三部分组成: $\mathbf{C} = (\mathbf{D}, \theta_c, \theta_f)$, \mathbf{D} 表示编码变量间的条件独立状态 $\mathbf{X}_i \perp \mathbf{X}_{\mathbf{nd}(i) \setminus \mathbf{pa}(i)} | \mathbf{X}_{\mathbf{pa}(i)}$; θ_c 为 Pair—copula 函数集合, 连接了 \mathbf{D} 中的网络节点; θ_f 为边际概率密度函数的参数集合。若 \mathbf{D} 中各节点变量母节点满足集合: $\mathbf{pa}(i, j) = \{\mathbf{k} \in \mathbf{pa}(i) | \mathbf{k} <_i \mathbf{j}\}$, 其中 $i \in \mathbf{V}, j \in \mathbf{pa}(i)$, 则称母节点的顺序是良序的, 将良序集合记为 \mathbf{O} , 用符号“ $<_i$ ”表示节点 i 的母节点的先后顺序。母节点顺序可由基于藤 Copula 模型结构选择算法的启发式规则得以确认, 步骤为: ① Kendall τ 相关性大的优先排序; ② 对第一步得出的排序进行调整, 减少 Copula 函数参数估计中的积分项, 降低模型参数估计难度。

Bauer 等 (2012) 证明得到: 如果有向无环图 $\mathbf{D} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ 带有母节点良序集 \mathbf{O} 及边缘分布函数严格递增的 \mathbf{D} —马尔科夫连续概率密度测度 \mathbf{P} , 则 \mathbf{P} 将由其单变量边缘分布 \mathbf{P}_i 和条件 Pair—copula 函数 $\mathbf{C}_{i, j|\mathbf{pa}(j)}$ 唯一决定, 其中 $i \in \mathbf{V}, j \in \mathbf{Pa}(i)$ 。因此, \mathbf{P} 的概率密度函数 \mathbf{f} 最终被分解为式 (4):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \prod_{i \in \mathbf{V}} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) \prod_{j \in \mathbf{pa}(i)} \mathbf{C}_{i, j|\mathbf{pa}(j)}(\mathbf{F}_{i|\mathbf{pa}(i, j)}(\mathbf{x}_i | \mathbf{x}_{\mathbf{pa}(i, j)}), \mathbf{F}_{j|\mathbf{pa}(i, j)}(\mathbf{x}_j | \mathbf{x}_{\mathbf{pa}(i, j)} | \mathbf{x}_{\mathbf{pa}(i, j)})) \quad (4)$$

其中: $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbf{V}} \in \mathbf{R}^d$, 该模型被称为 PCBN。

2. 基于 PCBN 的蒙特卡罗模拟。Alexander Bauer 等 (2011, 2012) 对基于 PCBN 的蒙特卡罗抽样模拟给出了详细介绍。为产生服从 PCBN 分解的多元联合分布函数的仿真序列, 首先生成 n 个 $[0, 1]$ 上均匀分布的相互独立的随机数 $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$, 然后对其进行分位数转换:

$$\begin{aligned} u_1 &= w_1, \\ u_2 &= F_{2|1}^{-1}(w_2 | u_1, \theta), \\ u_3 &= F_{3|12}^{-1}(w_3 | u_1, u_2, \theta), \\ &\dots = \dots, \\ u_n &= F_{n|1, n-1}^{-1}(w_n | u_1, \dots, u_{n-1}, \theta). \end{aligned}$$

通过 \mathbf{D} —马尔科夫属性对上述转换进行简化: $w_i = F_{1, \dots, i-1}^{-1}(u_i | u_1, \dots, u_{i-1}, \theta) = F_{i|\mathbf{pa}(i)}^{-1}(u_i | u_{\mathbf{pa}(i)}, \theta)$, 最终得到:

$$\begin{aligned} u_1 &= w_1, \\ u_2 &= F_{2|1}^{-1}(w_2 | u_1, \theta), \\ u_3 &= F_{3|\mathbf{pa}(3)}^{-1}(w_3 | u_{\mathbf{pa}(3)}, \theta), \\ &\dots = \dots, \end{aligned}$$

$$u_n = F_{n|\mathbf{pa}(n)}^{-1}(w_n | u_{\mathbf{pa}(n)}, \theta).$$

u_1, u_2, \dots, u_n 即为服从 PCBN 相关结构的 $[0, 1]$ 上的随机数。其中, 每个条件边际分布函数 $F_{i|\mathbf{pa}(i)}(u_i | u_{\mathbf{pa}(i)}, \theta)$ 都可由式 (4) 中的 Pair—Copula 函数及其相应概率积分求出。

3. VaR 计算及检验。VaR 是指在一定时间期限内, 在某个置信水平下, 某项资产或证券组合的最大损失值。用公式表示为:

$$\mathbf{P}(\mathbf{R}_t \leq \mathbf{VaR}_t(\alpha) | \Omega_{t-1}) = \alpha$$

其中: $1 - \alpha$ 是置信水平; $\alpha \in (0, 1)$; Ω_{t-1} 是 $t-1$ 时刻的信息集; \mathbf{R}_t 代表资产价值的损益。

运用蒙特卡罗方法计算基于 Pair—copula 贝叶斯网络模型计算多资产投资组合 VaR, 步骤如下:

(1) 建立边际分布模型, 得到残差序列, 使用概率积分变换得到 $[0, 1]$ 上的均匀分布序列。

(2) PCBN 模型建立: 首先, 使用网络结构学习算法确定网络结构; 然后, 确认节点变量良序集合及母节点变量排序, 得出 Pair—copula 的分解形式; 最后, 选取合适的 Pair—copula 函数进行参数估计及相关测度计算。

(3) 使用上述蒙特卡罗模拟法得到各资产第 $t+1$ 日的 10 000 个 n 维仿真序列, n 为投资组合中资产的个数。

(4) 根据资产的边际分布模型得出各资产投资组合收益率 $\mathbf{R}_{i, t}, i \in n$, 故投资组合收益率为: $\sum_{i=1}^n w_i \mathbf{R}_{i, t}$, w_i 为投资组合权重系数, 从而求得 VaR 值。

(5) 重复上述第三步、第四步 100 次, 得出 VaR 的平均值, 即为第 $t+1$ 日的 VaR 估计值。

(6) 检验模型的预测效果。Kupiec 失败率检验法: 假设计算 VaR 的置信度为 \mathbf{P} , 实际考察天数为 \mathbf{T} , 失败天数为 \mathbf{N} , 失败频率为 \mathbf{N}/\mathbf{T} , 对 VaR 模型准确性的检验转换为检验失败率 (\mathbf{N}/\mathbf{T}) 是否显著不同于 \mathbf{P} , 检验的原假设为: $\mathbf{H}_0: (\mathbf{N}/\mathbf{T}) = \mathbf{P}$, 似然比统计量为:

$$\mathbf{LR} = 2\ln((1 - \mathbf{p})^{\mathbf{T} - \mathbf{N}} \mathbf{P}^{\mathbf{N}}) + 2\ln((1 - \mathbf{N}/\mathbf{T})^{\mathbf{T} - \mathbf{N}} (\mathbf{N}/\mathbf{T})^{\mathbf{N}}) \sim \chi^2(1) \quad (5)$$

三、实证分析

选取美国标准普尔 500 指数 (SPX)、英国富实 100 指数 (UKX)、上证综合指数 (SH)、中国香港恒生综合指数 (HSCI)、印度孟买 30 指数 (BSESN)、日经 225 指数 (NKY) 构建国际投资组合。选取 2009 年 1 月 5 日 ~ 2014 年 6 月 23 日收盘价作为样本对象 (数据来源于雅虎财经网站), 记第 i 支股票每日收盘价为 $\mathbf{P}_{i, t}$, 根据对数收益率公式 (见式 (6)) 获得对数收益率序列:

$$r_{i, t} = 100 \times \ln(\mathbf{P}_{i, t} / \mathbf{P}_{i, t-1}) \quad (6)$$

剔除不存在交易额或数据缺失日期的数据, 处理后共 1 144 个有效数据, 将前 959 个作为样本数据, 后 185 个作为样本外数据, 样本外数据主要用于预测效果检验。

1. 收益率数据基本统计特征。由表1数据可以看出,各收益率数据都表现出一定的偏度,且峰度均大于3,并由JB统计量可以看出,各收益率均拒绝了正态性假设。根据单位根检验可知各收益率数据平稳。LM ARCH 检验证明各收益率序列具有明显的ARCH效应,因此我们选取GARCH模型作为变量的边际分布模型。

表1 数据的基本统计特征

	美国 SPX	英国 UKX	日本 NKY	上证 SH	香港 HSCI	印度 BSESN
均值	0.025 9	0.017 1	0.026 8	0.000 2	- 0.008 9	0.039 3
标准差	1.268 7	1.199 5	1.507 7	1.402 7	1.434 2	1.391 7
偏度	- 0.493 9	- 0.214 5	- 0.673 9	- 0.424 9	- 0.045 2	1.431 3
峰度	6.545 4	5.185 5	7.253 5	5.413 5	4.824 3	21.694 2
JB 统计量	541.269 8	198.211 3	795.532 3	261.617 8	133.308 8	14 291.82
概率值	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0

表2 两种 GARCH 模型的 AIC 值比较

AIC 值	美国 SPX	英国 UKX	日本 NKY	上证 SH	香港 HSCI	印度 BSESN
AR- GARCH- N	3.000 532	3.015 628	3.523 379	3.449 471	3.368 097	3.242 739
AR- GARCH- t	2.962 397	3.007 199	3.507 906	3.385 259	3.361 815	3.204 073

使用 GARCH 类模型对数据进行过滤,消除其序列自相关性及条件异方差性,记在时刻 t 股票指数 $i \in \{SPX, UKX, NKY, SH, HSCI, BSESN\}$ 的对数收益率为 $r_{i,t}$,基于数据非正态的基本统计特征及信息准则(AIC)最小原则,本文选取 AR(1)- GARCH(1,1)- t 模型作为边际分布模型:

$$r_{i,t} = \mu_i + \alpha r_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t}, \varepsilon_{i,t} \sim \sigma_{i,t} z_{i,t}, \sigma_{i,t}^2 = \omega_i + \alpha_i \varepsilon_{i,t-1}^2 + \beta_i \sigma_{i,t-1}^2 \quad (7)$$

其中:参数 $\omega_i > 0, \alpha_i, \beta_i \geq 0, \alpha_i + \beta_i < 1, |\alpha_i| < 1$, 并且 $\mu_i \in R$ 。

使用 Eviews 7.2 软件进行边际分布模型参数估计(估计结果见表3)并获得标准残差序列 $z_{i,t}$ 。残差序列经概率积分变换后得到符合 Copula 函数建模要求的 $[0, 1]$ 上的均匀分布序列 $u_{i,t}$, 经 K-S 检验 $u_{i,t}$ 均服从均匀分布,故 AR(1)- GARCH(1,1)- t 模型作为收益率单变量边际分布模型有效。

表3 AR(1)- GARCH(1,1)- t 模型参数估计

	μ	α	ω	α_i	β	ν
美国 SPX	0.004 8	- 0.035 8	0.029 9	0.102 3	0.878 9	5.444 0
英国 UKX	0.056 9	- 0.007 7	0.033 0	0.094 3	0.881 1	9.943 2
日本 NKY	0.068 1	- 0.020 8	0.095 8	0.092 8	0.860 8	12.449 7
上证 SH	0.004 8	- 0.034 4	0.019 1	0.023 5	0.966 6	4.800 2
香港 HSCI	0.015 7	- 0.007 6	0.020 1	0.050 4	0.936 6	12.600 4
印度 BSESN	0.026 2	0.021 3	0.027 7	0.053 2	0.925 5	8.550 2

2. PCBN 网络结构学习及 Pair-copula 模型选择与估计。贝叶斯网络结构学习算法主要由基于评分搜索和基于条件独立测试的两大类算法构成,在网络结构学习过程中,每种算法往往会得到较多的等价类难以确认最终

的网络结构。

这里我们同时使用基于条件独立测试的 PC 算法和基于评分搜索的爬山算法(HC)两种方法进行网络结构学习(处理软件使用 R3.0.2),通过对两种算法得出的结果进行比较,最终确认网络结构。结果显示 PC 算法与爬山算法得到了相同的道德图 D^m ,但 PC 算法在该实证中对边的方向识别效果不是很好,经爬山算法修正能够有效确认各边的方向,得到网络结构 DAG,记作 D,如图1所示。

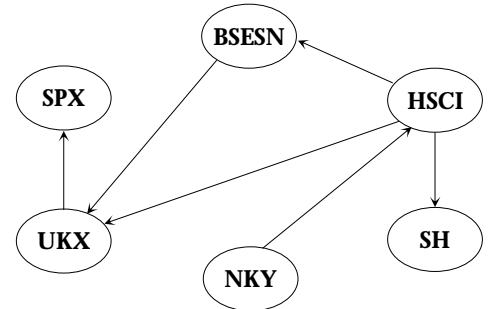


图1 网络结构图 D

为节点重新排序建立良序集合,各节点编号为:1- > 日本 NKY, 2- > 香港 HSCI, 3- > 上证 SH, 4- > 印度 BSESN, 5- > 英国 UKX, 6- > 美国 SPX。基于前文介绍的启发式程序确认 UKX 母节点顺序: $4 <_s 2$ 。最终得到联合概率分解模型如式(8):

$$f = C_{12} C_{23} C_{24} C_{25|4} C_{45} C_{56} \prod_{i=1}^6 f_i \quad (8)$$

Kjersti Aas 等(2009)指出构建 n 维藤 Copula 模型共需要确定 $n(n-1)/2$ 个 Pair-Copula 的函数族,而若变量 x, y 在给定条件集 v 下独立,则有 $C_{x,y|v} \{F(x|v), F(y|v)\} = 1$, 条件独立假设可以减少 Pair-copula 分解的数目,从而有效简化高维联合分布的构建过程。因此,若该联合分布使用藤结构进行分解,则共需要确定 15 个 Pair-copula 函数,本文使用 PCBN 模型通过 DAG 编码的网络结构有效地识别了变量间的条件独立关系,只需要确定式(8)中的 6 个 Pair-copula 函数,有效降低了模型参数估计及蒙特卡罗抽样过程的复杂程度。

本文选取对股指下行风险刻画较好的 Clayton Copula 函数来拟合金融随机变量,使用下尾相关系数表示变量间的相依程度。Clayton Copula 函数表达式为:

$$C_{Clayton} = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta} \quad (9)$$

其中 $\theta \in (0, \infty)$ 为相关参数,对应的下尾相关系数表达式为:

$$\lambda_{C_{cl}}^{\text{lo}} = 2^{-1/\theta} \quad (10)$$

边际分布 $F_{u_1|u_2}$ 用 h 方程表示为:

$$h(u_1, u_2) = u_2^{-\theta-1} (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{1-\theta} \quad (11)$$

参数估计结果及下尾相关系数值如表4所示。

边	NKY- HSCI	HSCI- SH	HSCI- BSESN	HSCI- UKX	BSESN- UKX	UKX- SPX
Copula	C12	C23	C24	C25 4	C45	C56
参数	1.001 0	0.853 3	0.892 2	0.240 8	0.694 3	1.250 3
下尾相依系数	0.500 3	0.443 8	0.459 8	0.056 2	0.368 5	0.574 4

一个金融资产价值出现大幅变动时,与其关系较为密切的其他资产将会首先受到影响,PCBN模型网络结构的马尔科夫特性符合这种风险逐级传递的特征,即边连接了具有直接相关关系的两个市场指数,图1给出了各资产间风险传递路径。可以看出欧美两个市场直接相连,其他的亚洲市场直接相连,国际股票市场表现出了较强的地域相关特征,因此,可以通过首先增加不同地域资产的配置数量,再选择地域内相依程度的较小的资产的方式来降低投资组合的总体风险。亚洲各市场满足以下条件独立限制:

$$SH \perp NKY | HSCI, SH \perp BSESN | HSCI, NKY \perp BSESN | HSCI,$$

即在香港市场的条件下其他亚洲市场相互独立且均与香港市场保持相比较高的相依性,可见香港市场是亚洲市场的连接枢纽,同时香港市场与欧洲市场表现出直接相依性,是欧美金融风险传播到亚洲市场的关键点,在该投资组合中为降低投资组合总体风险,防止因香港股指下跌而引起投资组合内部其他市场大规模的下尾风险联动效应发生,一定要降低香港恒生指数的配置比例。中国SH与美国SPX,日经NKY与美国SPX具有较长的拓扑路径,风险传递的路径最长,可适当加大相应的投资比例。

3. VaR计算及预测效果检验。为方便起见,本文假设投资组合为等权重投资。根据前文介绍的基于PCBN模型的蒙特卡罗仿真方法,使用MATLAB2008a软件进行程序处理,计算该投资组合样本外共185天的VaR值,与投资组合实际收益率进行比较,见图2。

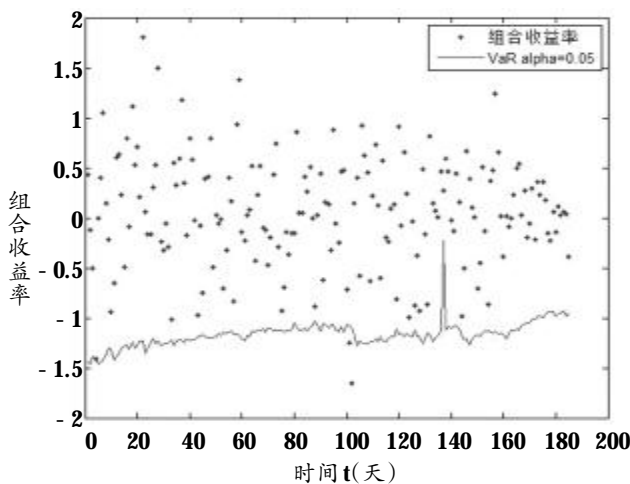


图2 VaR预测结果比较

得到预测失败天数为3天,期望天数为9.25天,失败频率为1.62%。99%置信水平上的似然比值LR=0.607 8,自由度为1的卡方分布临界值为6.634 9,似然比LR小于临界值,综上Kupiec失败率检验通过,

VaR预测结果有效。

四、结论

本文采用PCBN模型刻画多资产收益率的联合分布情况,PCBN模型在研究金融变量间相依结构及VaR预测问题中的优势在于:①PCBN模型有效地识别了变量间的条件独立关系,降低了高维Copula函数参数估计及蒙特卡罗抽样计算过程的复杂程度。②使用Copula参数化的连续型贝叶斯网络,有效捕捉到了金融资产变量间的非线性相依结构,将连续型贝叶斯网络拓展到实际研究,为今后使用贝叶斯网络解决复杂系统问题提供参考。③网络结构表达的马尔科夫特性符合金融风险逐级传递的特征,给出了各资产间风险传递的可视路径,具有实际的解释意义。

在今后的研究中还存在很大的拓展空间:①本文中相连节点变量间均选用了同一类型的Copula函数连接,在实际应用中可以针对两两变量的局部特征,选择更适合的Copula函数刻画局部相依特征。②通过预测效果检验已证明PCBN模型在VaR预测问题中的有效性,但与其他预测方法的比较研究还值得进一步讨论。③二元Copula函数与贝叶斯网络均具有动态模型,考虑变量间的相依结构会随时间推移发生变动的因素,将二者动态模型的有效结合并应用于实际也是下一步研究的方向;④藤结构与贝叶斯网络结构具有一定的对应关系,基于藤Copula的贝叶斯网络结构学习也是非常值得研究的。

主要参考文献

杜子平,闫鹏,张勇.基于“藤”结构的高维动态Copula的构建[J].数学的实践与认识,2009(10).

黄恩喜,程希骏.基于pair copula-GARCH模型的多资产组合VaR分析[J].中国科学院研究生院学报,2010(4).

高江.藤Copula模型与多资产投资组合VaR预测[J].数理统计与管理,2013(2).

杜子平,汪寅生,张丽.基于混合C藤Copula模型的外汇资产组合VaR研究[J].技术经济与管理研究,2013(2).

D. Kurowicka, R. M. Cooke. Distribution-free continuous Bayesian belief nets[J]. Quality and Reliability Engineering Statistics, 2005(10).

【基金项目】国家自然科学基金项目“时序非线性关联Copula理论建模及在金融领域的应用研究(项目编号:71071111);天津市社科理论“五个一批人才”基金项目