

数学视角下内含报酬率的测算

骆竹梅(副教授)

(浙江广厦建设职业技术学院 浙江东阳 322100)

【摘要】传统的《财务管理学》教材中,内含报酬率的计算一般直接使用插值法,但初学者难以理解该方法。笔者运用数学思维,从相似三角形对应边存在等比例关系出发,推导出相似三角形和矩形面积计算内含报酬率的方法。该方法不仅计算结果与传统方法一致,而且计算过程更加直观清晰,揭示了插值法的本质。

【关键词】内含报酬率 相似三角形 插值法

一、内含报酬率的本质

内含报酬率(Internal Rate of Return, IRR)一般指能够使未来现金流入量的现值等于未来现金流出量的现值的折现率。

$$\text{令: } NPV = \sum_{t=1}^n \frac{NCF_t}{(1+i)^t} - \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+i)^t} = 0$$

其中: NCF_t 是第 t 年的现金净流量, n 为项目寿命期限; C_t 表示第 t 年的投资额, i 为使得投资项目净现值NPV等于零时的折现率(IRR)。

内含报酬率本质是项目本身的收益能力,反映其内在的获利水平。只要IRR大于项目的资金成本或投资者要求的最低报酬率,应予采纳;若IRR等于项目的资金成本或投资者要求的最低报酬率,没有必要采纳;若IRR小于项目的资金成本或投资者要求的最低报酬率,应予放弃。譬如,以IRR作为贷款利率,项目全部通过借款来投资建设,那么等该项目还本付息后,投资者将一无所有。

二、内含报酬率的传统计算方法

翻阅了诸多《财务管理学》教材,内含报酬率的计算一般使用插值法,即首先估计一个折现率,用它来计算方案的净现值;如果净现值为正数,说明方案本身的报酬率超过估计的折现率,应提高折现率后进一步测试;如果净现值为负数,说明方案本身的报酬率低于估计的折现率,应该降低折现率后进一步测试。经过多次测试,找出使净现值接近零的贴现率,即方案本身的内含报酬率。

例1:浙江金东实业投资有限公司计划投资PD-I项目,初始投资额850万元,建设期为0,项目生命周期为5年,预测第1~5年年末的现金净流量分别是106.92万元、315.54万元、503.82万元、346.92万元和228.64万元;计算PD-I项目的内含报酬率。

PD-I项目净现值计算表

年份	每年现金净流量(NCF _t)	当折现率=20%时		当折现率=21%时	
		折现系数	现值(元)	折现系数	现值(元)
0	-8 500 000	1.000 0	-8 500 000.00	1.000 0	-8 500 000.00
1	1 069 200	0.833 3	891 000.00	0.82 64	883 636.36
2	3 155 400	0.694 4	2 191 250.00	0.683 0	2 155 180.66
3	5 038 200	0.578 7	2 915 625.00	0.564 5	2 843 932.55
4	3 469 200	0.482 3	1 673 032.41	0.466 5	1 618 407.40
5	2 286 400	0.401 9	918 852.88	0.385 5	881 506.18
净现值(NPV)		—	89 760.29	—	-117 336.84

从上表可知,当折现率为20%和21%时,分别对应的净现值为89 760.29元和-117 336.84元,可以推测净现值(NPV)等于零时的折现率将位于20%和21%之间。

假设内含报酬率 $i=20\%+x\%$,根据传统的插值法(又称“内插法”),存在如图1所示的数量等式关系:

$$\left. \begin{array}{l} \text{内含报酬率}(i) \\ 20\% \\ i=20\%+x\% \\ 21\% \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{净现值}(NPV, \text{元}) \\ 89\ 760.29 \\ 0 \\ -117\ 336.84 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} -207\ 097.13$$

图1 传统方式计算内含报酬率

$$\text{由 } \frac{x\%}{1\%} = \frac{-89\ 760.29}{-207\ 097.13}$$

解得: $x\%=0.433\ 4\%$

求得PD-I项目的内含报酬率:

$$i=20\%+x\%=20.433\ 4\%$$

三、数学视角下的内含报酬率计算

例2:承例1,各项参数不变,利用相似三角形原理来计算PD-I项目的内含报酬率。

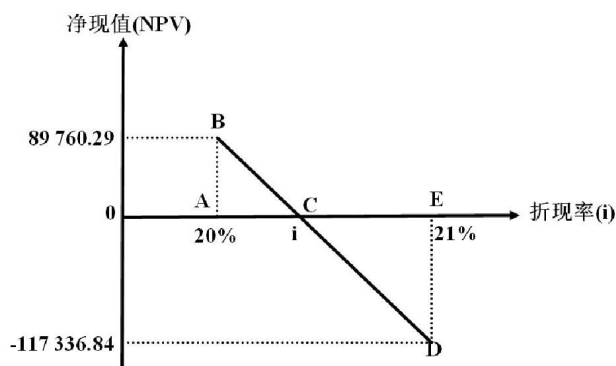


图2 运用相似三角形计算内含报酬率

根据图2信息所示,横坐标表示折现率*i*,为自变量;纵坐标代表净现值(NPV),系应变量,由此可得:A点坐标(20%,0)、B点坐标(20%,89 760.29)、C点坐标(*i*,0)、D点坐标(21%,-117 336.84)、E点坐标(21%,0),最后将问题转化成求C点的坐标。

由平面几何基础知识可得: $\triangle BAC \sim \triangle DEC$,所以根据两个相似三角形对应边长存在等比例的关系可得:

$$\frac{BA}{DE} = \frac{AC}{EC} \Rightarrow \frac{89\,760.29}{|-117\,336.84|} = \frac{(i-20\%)}{(21\%-i)}$$

解得:

$$i = \frac{(|-117\,336.84| \times 20\% + 89\,760.29 \times 21\%)}{(|-117\,336.84| + 89\,760.29)} \times 100\% = 20.433\,4\%$$

求得C点的坐标为(20.433 4%,0),即当折现率为20.433 4%时,PD-I项目的净现值(NPV)刚好等于零,即内含报酬率为20.433 4%。

由此可以推导出内含报酬率的一般公式:如果折现率= i_1 时, $NPV_1 > 0$,折现率= i_2 时, $NPV_2 < 0$,则以下公式成立:

$$\text{内含报酬率}(i) = \frac{(|NPV_2| \times i_1 + NPV_1 \times i_2)}{(|NPV_2| + NPV_1)} \times 100\%$$

此为计算内含报酬率的一般公式。

例3:承例1和例2,各项参数不变,利用矩形面积原理计算PD-I项目的内含报酬率。

根据图2绘制图3,图3中的横坐标代表折现率*i*,系自变量;纵坐标表示净现值(NPV),为应变量:A点坐标(20%,0)、B点坐标(20%,89 760.29)、C点坐标(*i*,0)、D点坐标(21%,-117 336.84)、E点坐标(21%,0)、F点坐标(20%,-117 336.84)、G点坐标(21%,89 760.29)。

由例2的计算结果和图3可知,“ $-117\,336.84 \times 20\%$ ”为原点(0,0)、A点(20%,0)、F点(20%,-117 336.84)和(0,-117 336.84)点围成的矩形面积 S_1 (竖直阴影部分);“ $89\,760.29 \times 21\%$ ”为原点(0,0)、(0,89 760.29)点、G点(21%,89 760.29)和E点(21%,0)围成的矩形面积 S_2 (右斜线阴影部分);“ $-117\,336.84 + 89\,760.29$ ”刚好是

线段FA的长度 L_1 加上线段AF的长度 L_2 ,即等于线段FB的长度(记为L),从而内含报酬率(i)= $(S_1+S_2)/L$ 。

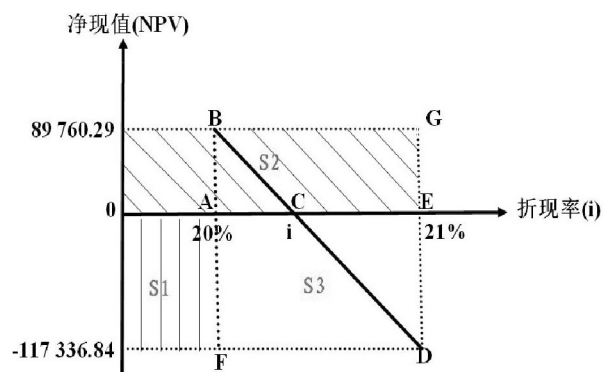


图3 根据矩形面积计算内含报酬率

或者换个角度看:从图3上看, (S_1+S_2) 的面积又等于由(0,89 760.29)点、G点(21%,89 760.29)、D点(21%,-117 336.84)和(0,-117 336.84)点围成的矩形面积 S 减去由A点(20%,0)、E点(21%,0)、D点(21%,-117 336.84)和F点(20%,-117 336.84)围成的矩形面积 S_3 (空白部分),可得内含报酬率(i)= $(S-S_3)/L$ 。验证结果显示,PD-I项目的内含报酬率为:

$$i = \frac{(|-117\,336.84| + 89\,760.29) \times 21\% - (21\% - 20\%) \times |-117\,336.84|}{(|-117\,336.84| + 89\,760.29)} = 20.433\,4\%$$

综上所述,两种数学方法计算PD-I项目内含报酬率的结果是一致的,且计算过程较传统方法更加直观清晰,初学者能从本质上掌握其计算过程。

四、注意事项

其一,注意公式的适用条件。当使用前文中的一般公式计算内含报酬率时,折现率 i_1 与 i_2 之间的差值尽可能地小,一般不能超过1%,否则计算结果误差较大。并且折现率 i_1 和 i_2 要分别使得 $NPV_1 > 0$ 且 $NPV_2 < 0$,即试算的两个净现值必须异号。另外,上述方法仅适用于考试时手工计算内含报酬率,若用EXCEL表格来计算,只需调用IRR函数。

其二,精确绘制二维坐标图。充分利用比较直观的形象思维,将测试结果满足以上“注意事项”第一点的点精确地绘制在二维坐标上,横坐标定为自变量折现率*i*,纵坐标作为应变量净现值(NPV)。

主要参考文献

1. 常叶青.财务管理.成都:西南交通大学出版社,2014
2. 中国注册会计师协会.财务成本管理.北京:经济科学出版社,2013
3. 袁志忠,朱庆须.财务管理模拟实验.北京:科学出版社,2009