

# 单位收益风险最小的投资组合模型构建及检验

吴雷<sup>1</sup> 姜昱汐<sup>1</sup>(博士) 李博达<sup>1</sup> 李刚<sup>2</sup>(博士)

(1.大连交通大学经济管理学院 大连 116028 2.东北大学秦皇岛分校 河北秦皇岛 066004)

**【摘要】** 本文 CVaR 与均值的比值测度单位收益风险并使其最小化,构建了基于单位收益风险最小的投资组合优化模型。此模型特色一是选用 CVaR 与均值之比度量单位收益风险,对收益和风险双重因素加以综合考虑,提高了投资的合理性;二是对 CVaR 进行离散化和线性化处理,使模型适用于任何分布下的投资组合问题,提升了模型的实用性。

**【关键词】** 投资组合 单位收益风险 CVaR

## 一、引言

自 1952 年 Markowitz 构建均值一方差模型定量研究资产组合选择问题后,现代投资组合理论正式诞生,成为现代金融学最主要的也是最具吸引力的领域之一。由于方差将组合收益的向上波动和向下波动都视为风险,不完全符合实际,夸大了组合的风险,而且协方差矩阵计算比较繁琐,使模型实用性不强。

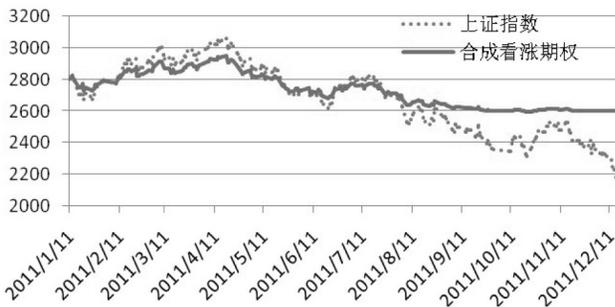
针对这些不足,人们相继提出了两类投资组合模型。一类是既定收益下风险最小化或者既定风险下收益最大化的投资组合模型。另一类是基于单位收益风险最小化或者单位风险收益最大化的投资组合模型。它是研究如何平衡好收益

与风险两者的关系,又被称为比值优化模型。上述第一类模型需要人为设定收益率或风险,更多依赖于投资者的主观判断,如果投资者对收益率期望过高或过低,很可能导致承担的单位收益风险偏高。而第二类模型基本上仍是使用方差或 VaR 作为风险测度指标,由于方差将收益向上波动也视为风险,不太符合实际,而 VaR 不满足次可加性,对尾部风险关注不足。

在综合考虑上述因素后,本文选用 CVaR 与均值的比值来度量投资组合的单位收益风险,建立了基于单位收益风险最小的投资组合优化决策模型,并利用股票市场数据对模型进行实证检验。

表 4 合成看涨期权年收益率与上证指数年收益率对比(2000~2012年)

	合成看涨期权收益率	上证指数年收益率
最大涨幅	115.3%	123.5%
最大跌幅	-14.4%	-63.8%
年均涨幅	17.1%	13.8%
累计涨幅	221.8%	179.8%
年均波动率	13.8%	24.0%
夏普比率	1.24	0.58



合成看涨期权和上证指数走势对比图

## 四、投资建议

蒙特卡洛模拟和中美两国股市的实证分析都表明,类看涨期权投资策略是一种损失有限、上涨不封顶的投资策略。针对上证综指和标普指数的合成看涨期权最大年度亏损都未超过 15%,符合一般稳健投资者的风险承受能力。成熟市场国家的股票指数年增长率尚在 7% 以上,如果我国 GDP 能保持中等速度的发展水平,相信股票市场的收益率不会太低。鉴于上证综指当前处于 2400 点以下(截至 2013 年 8 月 31 日),估值相对较低,而宏观经济有企稳回升迹象,类看涨期权投资策略是一个不错的选择。

### 主要参考文献

1. John C.Hull 著.张陶伟译.期权、期货和其他衍生品(第三版).北京:华夏出版社,2004
2. 中国期货业协会编.期货市场教程(全国期货从业人员资格考试用书).北京:中国财政经济出版社,2007
3. 张树德编著.金融计算教程——MATLAB 金融工具箱的应用.北京:清华大学出版社,2007
5. 殷醒民,谢洁.中国股票市场与经济增长关系的实证研究.复旦学报(社会科学版),2011;4

二、模型构建

1. 单位收益 CVaR 最小的优化原理。CVaR 通常译为条件在险价值,其含义为:在一定的置信水平下,损失超过 VaR 的条件均值,反映了超额损失的平均水平。与方差和 VaR 相比,CVaR 的优点非常明显:对尾部风险测量更为充分,满足次可加性,具有凸性,计算较为简便。因此,CVaR 被认为是一种较为完善有效的风险测度方法。

但现有 CVaR 模型中,大多是给定收益率使 CVaR 最小,求出投资比例。投资者要求的收益率不同,承担的风险值 CVaR 也不同。由于投资者对收益率的要求很大程度上依赖个人的主观判断,很有可能存在着对收益率过高或偏低的要求而使其承担的单位收益风险偏高。

**表 1 不同期望收益率下的投资组合**

组合	期望收益率	CVaR	CVaR/期望收益率
A	0.1	0.25	2.5
B	0.2	0.3	1.5
C	0.3	0.9	3

表 1 列示的是投资者三种不同期望收益率下的投资组合,组合 A 的期望收益率和风险值 CVaR 都较低,投资者相对“保守”,但是,这种对收益率的偏低要求导致了投资者为获得每单位的收益所承担的风险偏高。相反,组合 C 的期望收益率和风险值 CVaR 都较高,投资者相对“乐观”,但是,这种对收益率的过高要求导致了其为获得每单位的收益所承担的风险也过高。而组合 B 是期望收益率和风险值 CVaR 较为适中,投资者为获得每单位的收益所承担的风险最低,即获得的性(收益)价(风险)比最高,这是理性投资者的最优选择。

以 CVaR 与均值的比值测度单位收益风险并使其最小所构建的投资组合优化模型,不需要人为设定收益率就能求出投资比例,可以避免投资者主观上对收益率过高或过低的不合理要求而致使承担的单位收益风险偏高,在一定程度上减少了投资者对收益的盲目估计行为,提高了投资效率。

2. 目标函数的建立。由上述分析可知,选用 CVaR 与均值之比测度单位收益风险,可以使投资者为获得每单位收益所承担的风险最小,这是理性投资者的最佳选择。因此,目标函数为最小化 CVaR 与均值的比值,即:

$$\min \frac{CVaR}{\sum_{j=1}^m \bar{r}_j x_j} \quad (1)$$

其中:  $\bar{r}_j = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_{jt}$ ,  $m$  为投资组合中资产的数量,  $\bar{r}_j$  为组合中第  $j$  个资产  $n$  期的平均收益率,  $x_j$  为组合中第  $j$  个资产的投资比例,  $r_{jt}$  为组合中第  $j$  个资产第  $t$  期的收益率,  $n$  为历史数据的期数。

3. 约束条件的建立。

(1) 投资比例约束。组合中所有资产的投资比例之和应等

于 1,即:

$$\sum_{j=1}^m x_j = 1 \quad (2)$$

(2) 非负约束。通常,组合中所有资产不允许卖空,即:

$$x_j \geq 0, j=1, 2, \dots, m \quad (3)$$

4. 模型的建立。

(1) 模型的形式。综合式(1)~(3),得到基于单位收益风险最小的投资组合优化模型的初步形式,即:

$$\begin{aligned} \min & \frac{CVaR}{\sum_{j=1}^m \bar{r}_j x_j} \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \sum_{j=1}^m x_j = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

(2) CVaR 的离散化和线性化。设  $L(x, r)$  表示投资组合的损失函数,  $\theta$  代表置信水平。由 CVaR 的定义,得:

$$CVaR_{\theta} = E[L(x, r) | L(x, r) \geq VaR_{\theta}] \quad (5)$$

通过式(5),很难直接算出 CVaR,因为式子中涉及到 VaR 这个内生参数。

本文借鉴 Stanislav 和 Uryasev (2000)的方法,通过构造辅助函数,并对 CVaR 加以离散化处理,得到 CVaR 的近似表达式,即:

$$CVaR_{\theta} = \varepsilon + \frac{1}{(1-\theta)n} \sum_{t=1}^n [-\sum_{j=1}^m r_{jt} x_j - \varepsilon]^+ \quad (6)$$

其中:  $\varepsilon$  表示引入的变量,  $[-\sum_{j=1}^m r_{jt} x_j - \varepsilon]^+ = \max[-\sum_{j=1}^m r_{jt} x_j - \varepsilon, 0]$ 。

显然,式(6)中含有不光滑的函数  $\sum_{t=1}^n [-\sum_{j=1}^m r_{jt} x_j - \varepsilon]^+$ ,使模型求解不方便,可以对其线性化处理。引入变量  $y_t$ ,将其转化为线性函数  $\sum_{t=1}^n y_t$  和线性约束  $y_t \geq 0, y_t \geq -\sum_{j=1}^m r_{jt} x_j - \varepsilon$ 。

(3) 模型的等价形式。综合式(4)-(6),对 CVaR 作离散化和线性化处理,可得到模型等价形式,即:

$$\begin{aligned} \min & \frac{\varepsilon + \frac{1}{(1-\theta)n} \sum_{t=1}^n y_t}{\sum_{j=1}^m \bar{r}_j x_j} \\ & y_t \geq 0, y_t \geq -\sum_{j=1}^m r_{jt} x_j - \varepsilon (t = 1, 2, \dots, n) \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \sum_{j=1}^m x_j = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

岳瑞峰等(2003)证明了在解决优化问题时将 CVaR 离散化并线性化处理后最优解不变,因此,式(7)中的模型与式(4)中的模型有相同的最优解。对式(7)模型进行求解后,得到的  $\varepsilon$  值就是 VaR 值,目标函数中分子项  $\varepsilon + \frac{1}{(1-\theta)n} \sum_{t=1}^n y_t$  的值就

是 CVaR 值,分母项  $\sum_{j=1}^m \bar{r}_j x_j$  的值为期望收益率值,目标函数值为单位收益风险值。

对 CVaR 进行离散化和线性化处理,不仅降低了优化模型求解难度,并在求解模型的同时得到期望收益率、VaR 和 CVaR。而且,此模型不需假定收益率服从某一具体分布就能求出投资比例,使得模型的适用范围进一步扩展,模型的实用价值也得以提高。

5. 模型的特色。选用 CVaR 与均值的比值测度组合的单位收益风险,将收益和风险双重因素加以综合平衡,可以使投资者为获得每单位的收益所承担的风险最小,避免了投资者主观上对收益率过高或偏低的要求而导致对单位收益风险的过度承担,提高了投资的合理性。

对 CVaR 作离散化和线性化处理,不仅简化了模型的计算,而且使模型适用于计算任何分布下的投资组合问题,进一步拓宽了模型的适用范围,提高了模型的实用价值。

### 三、实证研究

1. 数据收集与统计分析。为分散风险,从我国沪深两市不同行业随机选取 10 只股票,时间从 2012 年 1 月 6 日到 2012 年 7 月 6 日,收集每周末股票收盘价计算周收益率。通过计算可得到 25 周样本数据,表 2 列示出样本描述性统计结果。

表 2 10 只股票收益率的描述性统计

股票名称	均值	标准差	偏度	峰度
云南白药	0.007	0.032	-0.19	-0.15
万科 B	0.014	0.052	0.364	0.207
长春燃气	0.007	0.047	-0.46	0.481
上海建工	-0.008	0.16	-3.98	18.36
宁波银行	0.004	0.037	-0.04	0.114
伊利股份	0.003	0.033	-0.12	-0.76
雏鹰农牧	-0.003	0.156	-4.22	19.69
上海机场	0.001	0.02	0.032	-0.07
皖新传媒	0.003	0.05	0.385	0.054
中国南车	0.002	0.041	0.717	0.178

从表 2 中可以看出:10 只股票收益率的偏度和峰度都不为 0,均不符合正态分布。其中,上海建工和雏鹰农牧两只股票收益率的偏度分别为-3.98 和-4.22,峰度分别高达 18.36 和 19.69,其分布明显带有“尖峰厚尾”,发生极端损失的概率较大,此时,选用 CVaR 较 VaR 能更好地反映出这种极端风险。

2. 模型求解与分析。将  $m=10, n=25$  等样本数据代入(7)式模型中,置信度  $\alpha$  分别取 90%、95%、99% 三种情况加以考虑,建立优化模型,并利用 MATLAB 进行求解,计算结果详见表 3。从表 3 中可以看出:在三种不同置信水平下,投资的股票种类保持不变,始终是云南白药、万科 B 和宁波银行三只股票,只是投资比例略有变化。当置信水平为 95% 时,投资者获得的周收益率为 0.692%,承担的风险值 VaR、CVaR 和单位收益风险分别为 3.32%、3.44% 和 4.9711,这说明有 95% 的把握

保证:上述三只股票组合收益率在未来一周内,由于市场波动所导致的正常损失不超过 3.32%,极端损失不超过 3.44%,为获得 1% 的收益所承担极端损失不超过 4.971 1%。

表 3 模型求解结果

股票名称	投资比例 ( $\alpha=90\%$ )	投资比例 ( $\alpha=95\%$ )	投资比例 ( $\alpha=99\%$ )
云南白药	0.298 4	0.293 9	0.289 9
万科 B	0.201 8	0.224 3	0.236 9
长春燃气	0	0	0
上海建工	0	0	0
宁波银行	0.499 8	0.481 8	0.473 2
伊利股份	0	0	0
雏鹰农牧	0	0	0
上海机场	0	0	0
皖新传媒	0	0	0
中国南车	0	0	0
周收益率	0.006 72	0.006 92	0.007 04
VaR	0.032 8	0.033 2	0.033 3
CVaR	0.032 9	0.034 4	0.037 3
单位收益风险	4.895 8	4.971 1	5.298 3

同时也不难发现:三种不同置信水平下,CVaR 值比 VaR 值都大,这说明风险测度方法 CVaR 较 VaR 更能反映投资组合的风险。而且置信度  $\alpha$  越高,VaR 值和 CVaR 值也相应越高,对风险的估计也就越足,计算结果就更为可信。伴随着平均收益率逐步提高,VaR、CVaR 和单位收益风险也同时提高,这意味着投资者要求的收益率越高,所承担的风险也越高。

### 四、结论

本文使用 CVaR 与均值的比值度量投资组合的单位收益风险并使其最小化,建立了单位收益风险最小的投资组合优化模型,并利用股票市场数据对模型加以实证检验。选用 CVaR 与均值的比值度量组合的单位收益风险,将收益和风险的双重因素加以综合考虑,使投资者获得每单位收益所承担的风险最小,防止了投资者主观上对收益率过高或偏低的不合理要求而导致其承担的单位收益风险偏高,提升了投资的合理性。将 CVaR 进行离散化和线性化处理,不仅简化了模型的计算,而且使模型适用于任何分布的投资组合问题,进一步拓展了模型的适用范围,提高了模型的实用价值。

【注】本文系国家自然科学基金(项目编号:71301015)、河北省自然科学基金青年科学基金(项目编号:G2012501013)和辽宁省社科基金(项目编号:L11AJL005)的研究成果。

### 主要参考文献

1. 张金清.基于单位收益风险的投资决策模型与分析.湖南文理学院学报,2004;2
2. 武敏婷,高岳林.限制性卖空的单位风险收益最大投资组合模型.武汉理工大学学报,2010;8
3. 岳瑞峰,李振东,杨晓萍.风险管理的 CVaR 方法及其简化模型.河北省科学院学报,2003;3