项目投资内部收益率计算之迭代法

刘亚铮(教授)　张　昭

(中南大学商学院　长沙　410083)

【摘要】内部收益率(IRR)是投资项目评价的重要指标,内插法作为IRR传统的计算方法,简单方便但计算不够准确。IRR的求解方程为高次非线性方程,二分法是数值方法中求解此类方程根的基本方法,能保证结果收敛,IRR值也比较准确,但计算繁琐,收敛速度较慢。简单迭代法是在二分法的基础上发展起来的,其计算相对简单,得出的IRR值比较准确。将Aitken加速迭代法引入IRR的计算中,相比之下,该方法既能得出比较真实的IRR,又大大减少了迭代次数。

【关键词】内部收益率　二分法　简单迭代法　Aitken迭代法

一、引言

内部收益率(IRR)作为投资项目评价的重要指标而广泛应用，其经济含义为使投资项目在寿命期内的净现值为零的贴现率。IRR传统的计算方法为内插法，该方法方便简单,但有明显的不足之处。总的来说内插法有以下缺点:①计算太粗糙,结果不够准确;②当投资项目金额较大时,内插法的误差放大明显,甚至可能影响决策的正确性。

因此要提高内部收益率评价的效果和准确性，就得寻求新的计算方法,二分法应运而生。

二分法计算简单,能保证收敛,但它对于方程单根存在区域信息要求太高。并且每步计算中,都要判断符号,太过繁琐。实际应用中,求解方程根的主要方法是迭代方法。

二、简单迭代法

迭代法的基本思想:将NPV(i)=0转化为i=φ(i),φ(i)为连续函数，此方程称为不动点方程，满足此方程的点为不动点,这样将NPV(i)的零点问题转化为求φ(i)的不动点问题。但φ(i)得满足以下定理:

如果φ(i)满足下列条件:

(1)当$i\in[a,b]$时,$\varphi(i)\in[a,b]$;

(2)当$i\in[a,b]$,存在$0<L<1$,使$|\varphi'(i)|\leq L<1$。

则方程i=φ(i)在[a,b]上有唯一的根i^*,且对任意初值$i_0\in[a,b]$时,迭代序列$i_{k+1}=\varphi(ik)(k=0,1\ldots)$收敛于$i^*$。这里L可看成是φ′(i)在[a,b]内的上界。

迭代法求解IRR的步骤为:①构造迭代式;②分析其收敛性;③分析迭代的收敛速度与误差。

对期初投资为P,年净现金流入量为A,残值为SC,年限为n的投资项目,其内部收益率计算如下:

$$NPV=-P+A\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}+SC\frac{1}{(1+i)^n}=0$$

将上式进行一系列变换,改写为:

$$i=\frac{A[(1+i)^n-1]+SC\times i}{P(1+i)^n}$$

导出迭代公式为:

$$i_{k+1}=\varphi(i_k)=\frac{A[(1+i_k)^n-1]+SC\times i_k}{P(1+i_k)^n}\qquad(1)$$

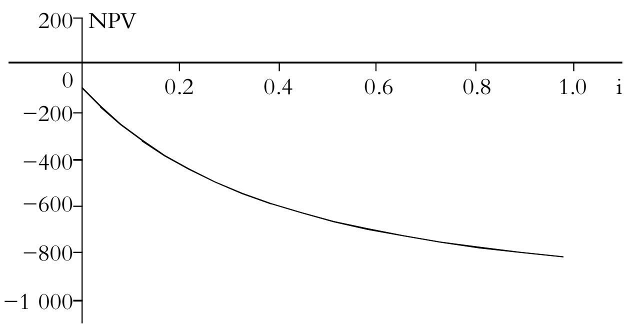
显然,只要式(1)中的$\varphi(i_k)$和$\varphi'(i_k)$满足上述定理,就可进行迭代计算,从而得出IRR。并且当残值SC=0时,只要满足上述定理,依然可以进行迭代。

这里要指出的是，并不是所有等额年金项目的IRR方程换算成式(1)的形式就可以进行迭代了,因为并非所有的式(1)都能满足上述定理。看下面这种情况:

表1　　某项目现金流情况

年限(年)	0	1	2	3
现金流(万元)	−1 100	300	300	400

该项目的净现值函数曲线如下:



项目净现值函数曲线

该项目的收入小于支出,当i=0时,NPV<0。从上图可以看出,当i>0时,该项目的净现值曲线与横轴(r)没有交点。因此即使将其内部收益率方程变换成式(1),在i>0时也不能迭代出正确的结果。

算例:期初投资1 500万元,预期未来10年中每年可收回310万元,期末可获得残值150万元,计算内部收益率如下:

$$i_{k+1}=\varphi(i_k)=\frac{310[(1+i_k)^{10}-1]+150\times i_k}{1\ 500(1+i_k)^{10}}$$

可以证明，$\varphi(i_k)$和$\varphi'(i_k)$是满足定理中的两个条件的。取初值$i_0=0.2$进行迭代计算，结果如表2：

表2　　简单迭代法计算IRR结果

k	i_k
0	0.2
1	0.176 518 958
2	0.169 469 792
…	…
13	0.165 598 186
14	0.165 598 139
…	…

与二分法相比，简单迭代法要达到类似的精度，只迭代了14次，并且省去了计算NPV(i)并判断其符号，将此时得到的IRR值代入NPV(i)得出NPV(IRR)=1.60(元)，显然此时得出的IRR的近似值也是比较接近真实值的。

三、加速迭代技术

从表2中可看出，简单迭代法计算IRR的迭代次数还是比较多的，为既能得出较真实的IRR，又能减少迭代次数，就得寻求加速收敛的方法。数值分析中，此类方法有松弛法、Aitken加速迭代法等。本文以Aitken加速迭代法为例进行探讨。

在简单迭代的基础上，将迭代值i_k再迭代一次，即：$i_{k+1}=\varphi(i_k)$，用IRR表示内部收益率的真实值。根据微分中值定理，得：

$i_{k+1}-IRR=\varphi(i_k)-\varphi(IRR)=\varphi'(\xi)(i_k-IRR)$（$\xi$在$i_k$与IRR之间）

在以IRR为中心的微小邻域中，$\varphi'(i)$改变不大，近似的为某个值L（$L\neq0$，否则上式中，$i_{k+1}-IRR=0$，此时已无迭代意义），则上式改写为：

$$i_{k+1}-IRR=L(i_k-IRR) \quad (2)$$

将式(2)中的i_{k+1}再迭代一次得：$i_{k+2}=\varphi(i_{k+1})$，再用微分中值定理，得：

$$i_{k+2}-IRR=L(i_{k+1}-IRR) \quad (3)$$

由(2)和(3)联立同除以L得：

$\dfrac{i_{k+1}-IRR}{i_{k+2}-IRR}\approx\dfrac{i_k-IRR}{i_{k+1}-IRR}$，因而有：

$$IRR\approx\frac{i_k i_{k+2}-i_{k+1}^2}{i_{k+2}-2i_{k+1}-i_k}=i_k-\frac{(i_{k+1}-i_k)^2}{i_{k+2}-2i_{k+1}-i_k} \quad (4)$$

Aitken加速迭代法计算IRR的思路如下：

第一步，计算$i_{k+1}^1=\varphi(i_k)$（迭代）；

第二步，计算$i_{k+1}^2=\varphi(i_{k+1}^1)$（迭代）；

第三步，计算$i_{k+1}=i_{k+1}^2-\dfrac{(i_{k+1}^2-i_{k+1}^1)^2}{i_{k+1}^2-2i_{k+1}^1+i_k}$（改进）。

Aitken加速迭代法是用已有的数据进行外推，以达到加速收敛的目的，并且若$i_{k+1}=\varphi(i_k)$是线性收敛的，则Aitken法为平方收敛的。

现在再讨论前面的算例，还是用前面的迭代式：

$$i_{k+1}=\varphi(i_k)=\frac{310[(1+i_k)^{10}-1]+150\times i_k}{1\,500(1+i_k)^{10}}$$

取初值$i_0=0.2$进行Aitken迭代，结果如表3：

表3　　Aitken迭代法计算IRR结果　（NPV单位：万元）

k	0	1	2	3	…
x_k	0.2	0.176 518 958	0.165 711 798	0.165 598 125	…
i_{k+1}^1	–	0.169 469 792	0.165 640 599	0.165 598 116	…
i_{k+1}^2	–	0.167 018 572	0.165 613 996	0.165 598 113	…
i_{k+1}	–	0.165 711 798	0.165 598 125	0.165 598 111	…
NPV	–	−0.644 478 059	−8.076 99E−05	−1.122 66E−12	…

从表3中可以看出，与表2中的计算结果相比，Aitken迭代法的收敛速度是非常快的，表中的i_{k+1}即IRR的近似值，最后一行为相应的净现值。从第二轮迭代到第三轮迭代，IRR值仅在小数点后第八位出现差异，相应NPV值由−0.81元减小到-1.12×10^{-8}元！显然，此时的净现值已接近于0，相应IRR的近似值也非常接近其真实值。

这里需要指出的是，Aitken迭代法的收敛速度与初始值i_0取值的关系不是很大，例如将i_0的初始值有0.2改为0.5，迭代到第三轮，$IRR\approx i_3=0.165\,598\,111$，前九位数字与初值$i_0=0.2$的结果相同，此时，$NPV(i_3)\approx-7.635\,43\times10^{-8}$(元)，也接近于0。

四、结论

内插法作为计算投资项目内部收益率(IRR)的传统方法有其不足之处，为提高IRR的准确性，需要寻求新的计算方法。内部收益率方程是一个非线性方程，二分法作为求解非线性方程的基本方法，能保证收敛，计算出的IRR也较准确，但计算繁琐，且收敛速度较慢。

简单迭代法是对二分法的发展，将非线性方程NPV(i)=0的零点问题转化为求$i=\varphi(i)$的不动点问题，其收敛速度还是比较慢的。

引入的Aitken加速迭代法既能得出相对真实的IRR，又能减少迭代的次数，该方法充分利用已有的数据进行外推，以达到加速收敛的目的。

主要参考文献

1. 方健.基于Excel的IRR计算方法的思考.中国管理信息化(会计版)，2007；10

2. 杨旭岩.三点二次插值法求常规投资项目的内部收益率.科技和产业，2009；9

3. 张宗元.内部收益率的一种快速算法——迭代法.基建优化，1994；15

4. 高小桥.建设项目财务内部收益率的一种新解方法探讨.第二届中国软科学学术年会论文集，1998

5. 张志强.内含报酬率的一种迭代算法.技术经济与管理研究，2007；3

6. 潘文亮，沈惟维.内部收益率的数值解法.科学技术与工程，2010；10

7. 陆宁，侯健.运用黄金分割原理优化求解内部收益率.长安大学学报(建筑与环境科学版)，2003；20